Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1986

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Coefficient 4

Vendredi 2 mai 1986 de 14 heures à 18 heures

Nota :

– les quatre exercices sont indépendants.

– IN désigne l'ensemble des entiers naturels et IR celui des nombres réels.

EXERCICE 1

On note f l'endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'autre part, on considère les trois éléments v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $v_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $v_2 = -e_2 + e_3$, $v_3 = e_3$.

1. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de v_1, v_2, v_3.

2. Montrer que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On note P la matrice de passage de la base B à la base B' ; calculer P et P^{-1}.

3. Déterminer la matrice A' de l'endomorphisme f relativement à la base B'.

4. Calculer $(A')^2$, $(A')^3$, $(A')^n$ puis A^n pour tout entier naturel non nul n.

EXERCICE 2

On désigne par f et g deux fonctions continues de IR dans IR. On définit la fonction $h = f * g$ par :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto h(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,dt.$$

1. Montrer que $f * g = g * f$.

2. Dans cette question, on suppose que, pour $x \leqslant 0$, $f(x) = g(x) = 0$, et, pour $x > 0$, $f(x) = x^p$, $g(x) = x^q$ avec p et q ∈ IN. On pose $I_{p,q} = f * g$.
   a. Déterminer $I_{p,0}$, $I_{1,1}$, $I_{1,2}$.
   b. Pour p et q ∈ IN, $q \geqslant 1$, établir une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,\,q-1}$, et en déduire explicitement $I_{p,q}$.

3. On suppose que f et g sont définies respectivement par $f(x) = |x|$ et $g(x) = x-1$, pour tout x ∈ IR.
   Déterminer la fonction $f * g$, et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé. On précisera la tangente à l'origine du repère.

EXERCICE 3

Une urne contient trois boules (une bleue, une blanche, une rouge), dont les tirages sont supposés équiprobables. On effectue des tirages successifs d'une boule, avec remise à chaque fois de la boule tirée. Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$, on appelle A_n l'évènement : les n–1 premiers tirages ont donné la même boule, et la $n^{ème}$ boule tirée est différente de celle tirée lors des n–1 premiers tirages.

1. Déterminer les probabilités $p(A_2)$, $p(A_3)$, $p(A_n)$ pour tout n ∈ IN tel que $n \geqslant 2$.

2. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} p(A_n)$.

3. On appelle X la variable aléatoire réelle prenant la valeur n lorsque A_n est réalisé, et 0 lorsque A_n n'est pas réalisé ; calculer l'espérance et la variance de X.

EXERCICE 4

On considère la fonction f définie par $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto e^{-3x^2} - 3x + 5.$$

1. Calculer f' et f''. Étudier les variations de la fonction f sur IR. Tracer la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormé, l'unité étant prise égale à 2 cm.
   Quelles sont les coordonnées des points d'inflexion de C_f ?

2. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Donner une valeur approchée de α à l'aide de C_f.

3. Donner une meilleure valeur approchée de α à l'aide du théorème des accroissements finis.